

Simultaneous Influence of Helicity and Compressibility on Anomalous Scaling of the Magnetic Field in the Kazantsev-Kraichnan Model

Martin Menkyna

Oddelenie teoretickej fyziky ÚEF

Súťaž mladých vedeckých pracovníkov ÚEF



Simultaneous influence of helicity and compressibility on anomalous scaling of the magnetic field in the Kazantsev-Kraichnan model

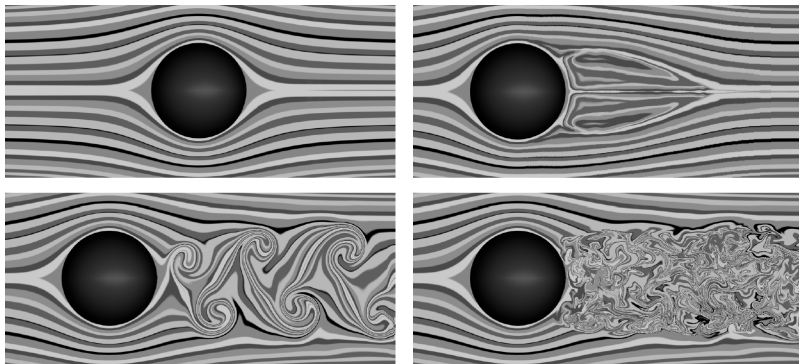
E. Jurčišinová, M. Jurčišin, M. Menkyna (33,3%)

Phys. Rev. E **95**, (2017) 053210

Zoznam citácií:

Statistical symmetry restoration in fully developed turbulence: Renormalization group analysis of two models, N. V. Antonov, N. M. Gulitskiy, M. M. Kostenko, A. V. Malyshev, práca bude publikovaná vo Phys. Rev. E

- ▷ model magneto-hydrodynamickej plne rozvinutej turbulencie



- ▷ model magneto-hydrodynamickej plne rozvinutej turbulencie
- ▷ magnetické pole $\mathbf{b}(t, \mathbf{x})$ uvažujeme ako vektorovú prímes, popísanú pomocou

$$\partial_t \mathbf{b} = \nu_0 \Delta \mathbf{b} - (\mathbf{v} \cdot \partial) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \partial) \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

kde $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, $\Delta \equiv \partial^2$ je Laplaceov operátor, $\nu_0 = \frac{c^2}{4\pi\sigma_0}$ je konštanta magnetickej difúzie pri elektrickej vodivosti σ_0

- ▷ $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ označuje priečny Guassovský biely šum s korelačnou funkciou danou ako

$$D_{ij}^b(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') \equiv \langle f_i(t, \mathbf{x}) f_j(t', \mathbf{x}') \rangle = \delta(t - t') C_{ij} \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{L} \right)$$

- ▷ presný tvar škálovaczej funkcie $C_{ij}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/L)$ nie je dôležitý

$$\partial_t \mathbf{b} = \nu_0 \Delta \mathbf{b} - (\mathbf{v} \cdot \partial) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \partial) \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

- ▷ $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ je náhodné, stlačiteľné ($\partial \cdot \mathbf{v} \neq 0$) rýchlostné vektorové pole, ktoré spĺňa Gaussovskú štatistiku ($\langle \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \rangle = 0$) s párovou korelačnou funkciou

$$D_{ij}(x; x') \equiv \langle v_i(x) v_j(x') \rangle = \delta(t - t') D_0 \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{R_{ij}(\mathbf{k})}{k^{d+\varepsilon}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')},$$

kde d je dimenziu systému, $D_0 \equiv g_0 \nu_0$ pozitívna amplitúda a g_0 predstavuje náboj

- ▷ $R_{ij}(\mathbf{k})$ predstavuje projektor definovaný ako

$$R_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} + \alpha \frac{k_i k_j}{k^2} + i \varepsilon_{ijs} \rho \frac{k_s}{|\mathbf{k}|},$$

kde $0 \leq \alpha \ll 1$ je parameter stlačiteľnosti a $0 \leq |\rho| \leq 1$ určuje mieru narušenia priestorovej parity v systéme. $|\rho| = 1$ zodpovedá úplnému narušeniu priestorovej symetrie, zatiaľ čo $|\rho| = 0$ prislúcha kompletne symetrickému prípadu (v štatistickom zmysle)

Teorém

DeDominicisov-Janssenov teorém hovorí, že stochastický problém (1) je rovnocenný pořovo-teoretickému modelu s množinou troch polí $\mathbf{v}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{b}'$ s účinkom

$$\begin{aligned} S[\mathbf{v}, \mathbf{b}, \mathbf{b}'] = & -\frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 v_i(x_1) D_{ij}^{-1}(x_1; x_2) v_j(x_2) \\ & + \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 b'_i D_{ij}^b(x_1; x_2) b'_j(x_2) \\ & + \int dx \mathbf{b}' \cdot [-\partial_t \mathbf{b} + \nu_0 \Delta \mathbf{b} - (\mathbf{v} \cdot \partial) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \partial) \mathbf{v}] \end{aligned} \quad (2)$$

Model (2) zodpovedá štandardnej Feynmanovskej poruchovej teórii s propagátormi

$$\Delta_{ij}^{bb'}(k) = \langle b_i b'_j \rangle_0 = \frac{P_{ij}(\mathbf{k})}{-i\omega_k + \nu_0 k^2} = \left(\Delta_{ij}^{b'b} \right)^*, \quad \langle b_i b'_j \rangle_0 = \text{---|}$$

$$\Delta_{ij}^{vv}(k) = \langle v_i v_j \rangle_0 = \frac{\nu_0 g_0 R_{ij}(\mathbf{k})}{k^{d+\varepsilon}}, \quad \langle v_i v_j \rangle_0 = \text{---}$$

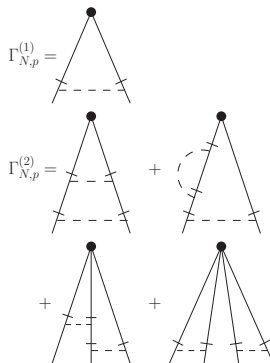
kde $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ je obyčajný priečny projektor a interakčný vrchol má vo Fourierovej reprezentácii $V_{ijl} = i(k_l \delta_{ij} - k_j \delta_{i,l})$

$$V_{ijl} = \text{---} \overset{b'_i}{|} \text{---} \begin{matrix} \nearrow b_j \\ \searrow \text{---} v_l \end{matrix}$$

- ▷ zaujímalo nás hlavne správanie sa jedno-časových dvoj-bodových korelačných funkcií magnetického poľa, ktoré majú všeobecný tvar

$$B_{N-m,m}(r) \equiv \left\langle b_r^{N-m}(t, \mathbf{x}) b_r^m(t, \mathbf{x}') \right\rangle,$$

kde b_r označuje zložku indukcie pozdĺž vektora $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$



Obr. 1: Potrebné Feynmanove grafy.

- ▷ po dlhšej analýze pomocou metódy operátorového rozkladu dostávame tvar

$$B_{N-m,m}(r) \propto r^{\zeta_{N,m}} = r^{\zeta_{N,m}^{(1)}\varepsilon + \zeta_{N,m}^{(2)}\varepsilon^2}$$

- ▷ pre obe N a m párne alebo obe nepárne

$$\zeta_{N,m}^{(1)} = -\frac{m(N-m)(d-1)[1+\alpha(d+1)]}{(d+2)(d-1+\alpha)}$$

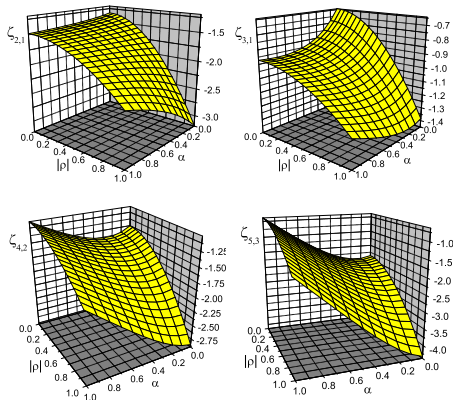
- ▷ pre párne hodnoty N a nepárne hodnoty m

$$\zeta_{N,m}^{(1)} = -\frac{(d-1)\{m(N-m)[1+\alpha(d+1)] + d+1+\alpha\}}{(d+2)(d-1+\alpha)}$$

- ▷ dvojslučkové korekcie $\zeta_{N,m}^{(2)}$ majú tvar

$$\begin{aligned}\zeta_{N,m}^{(2)} = & -\frac{S_{d-1}}{S_d} \frac{d}{(d+2)(d-1+\alpha)^2} \int_0^1 dx (1-x^2)^{\frac{d-3}{2}} \left\{ \sqrt{1-x^2} \right. \\ & \times [(d-2)D_1(W_1Y_1 + 2\rho^2\delta_{3d}Y_3) + D_2W_2Y_1] \\ & \left. - \frac{2}{d+4}(D_3W_3 + D_4W_4)Y_2 \right\}\end{aligned}$$

Anomálne škálovanie $B_{N-m,m}(r)$

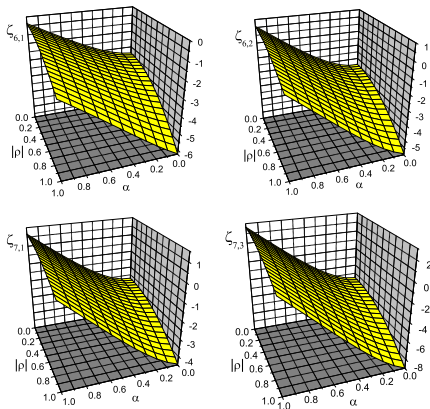


Obr. 2: Závislosť dvoj-slučkových škálovacích exponentov $\zeta_{2,1}$, $\zeta_{3,1}$, $\zeta_{4,2}$ a $\zeta_{5,3}$ na α a ρ pre $d = 3$ a $\varepsilon = 1$.

- ▷ škálovacie vlastnosti korelačných funkcií $B_{N-m,m}$ sa stávajú viac anomálne pod vplyvom helicity
- ▷ v rozumnom súlade s najnovšími experimentálnymi výsledkami^a
- ▷ správanie sa $\zeta_{2,1}$ ako funkcie α pre fixované $|\rho|$
- ▷ jedinečný charakter $\zeta_{3,1}$ ako funkcie $\alpha \ll 1$ pre $|\rho| \approx 1$
- ▷ klesajúce tendencie $\zeta_{4,2}$ a $\zeta_{5,3}$ pre dostatočne malé α a $|\rho|$
- ▷ pre dostatočne veľké hodnoty α sa škálovacie exponenty stávajú rastúcimi funkciami α bez ohľadu na veľkosť $|\rho|$

^aD. A. Schaffner et al, Phys. Rev. Lett. **112**, (2014) 165001

Anomálne škálovanie $B_{N-m,m}(r)$



- ▷ $\zeta_{N,m}, N = 6, 7$ sú univerzálne rastúcimi funkciami α bez ohľadu na hodnotu parametra ρ
- ▷ aj keď to tu nie je ukázané explicitne, podobné správanie majú všetky škálovacie exponenty pre $N \geq 8$

Obr. 3: Závislosť dvoj-slučkových škálovacích exponentov $\zeta_{6,1}$, $\zeta_{6,2}$, $\zeta_{7,1}$ a $\zeta_{7,3}$ na α a ρ pre $d = 3$ a $\varepsilon = 1$.

- ▷ škálovacie vlastnosti $B_{N,m}(r)$ v rámci Kazantsevovho-Kraichnanovho modelu s narušením priestorovej parity a stlačiteľnosti boli skúmané pomocou poľovo-teoretickej RG a operátorového rozvoja do druhého rádu poruchovej teórie
- ▷ IČ asymptotické správanie je závislé od α ale nezávislé od ρ
- ▷ prítomnosť helicity môže výrazne zmenšiť škálovacie exponenty korelačných funkcií magnetického poľa
- ▷ preskúmaný bol takisto aj vplyv stlačiteľnosti, ale tá vykazuje zložitejšie správanie sa
 - pre korelačné funkcie nižších rádov sú škálovacie exponenty klesajúce funkcie stlačiteľnosti, aspoň pre oblasť $\alpha \ll 1$ a $|\rho| \ll 1$
 - avšak pre vyššie rády sú univerzálne rastúcimi funkciami α bez ohľadu na hodnotu parametra ρ

Ďakujem za pozornosť!

$$C_1 = (d+1)(N-p)(d+N+p-2) - 2N(N-1) \quad (3)$$

$$C_2 = -(N-p)(d+N+p-2) + dN(N-1), \quad (4)$$

$$C_3 = (N-2)C_1, \quad (5)$$

$$C_4 = (N-2)[-3(N-p)(d+N+p-2) + (d+2)N(N-1)], \quad (6)$$

and

$$W_1 = 2 + \alpha - \alpha^2 \quad (7)$$

$$W_2 = 2(1-x^2) + \alpha[d(d-3) + 4x^2] - \alpha^2[d(d-1) - 2(1-x^2)], \quad (8)$$

$$W_3 = (1-x^2)(9-5d+4x^2) + \alpha[9(1-2x^2) + x^2(d^2+8x^2) + 5d(1-x^2)] \\ - \alpha^2(10-3d-11x^2+4x^4), \quad (9)$$

$$W_4 = -2(1-x^2)^2 + 4\alpha(1-x^2)(d-x^2) \\ + \alpha^2[d^2(d+1-x^2) - 2(1-x^2)^2 + d(2x^2-3)]. \quad (10)$$

In addition,

$$Y_1 = x \left[\arctan \left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \right) - \arctan \left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right], \quad (11)$$

$$Y_2 = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \left[\arctan \left(\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} \right) - \arctan \left(\frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}} \right) \right], \quad (12)$$

$$Y_3 = \pi - \arctan \left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \right) - \arctan \left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \right). \quad (13)$$

$$D_1 = D_2 = 2m(N - m), \quad D_3 = m(N - m)(3N + 2d - 4), \quad (14)$$

$$D_4 = 3m(N - 4)(N - m) \quad (15)$$

for even values of N and m ,

$$D_1 = 2[m(N - m) + d + 1], \quad D_2 = 2[m(N - m) - 1], \quad (16)$$

$$D_3 = m(N - m)(3N + 2d - 4) + (N - 4)(d + 1), \quad (17)$$

$$D_4 = 3(N - 4)[m(N - m) - 1] \quad (18)$$

for even N and odd m , and

$$D_1 = D_2 = 2m(N - m), \quad D_3 = (N - m)[m(3N + 2d - 4) - d - 1], \quad (19)$$

$$D_4 = 3(N - m)[m(N - 4) + 1], \quad (20)$$